УДК 519.95

ПРИМЕНЕНИЕ MATLAB ДЛА АНАЛИЗА И СИНТЕЗА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЕТЯХ ПОСТАВОК

Дорофеев Д.Ю., Дорофеев Ю.И., Никульченко А.А.,
Национальный технический университет "ХПИ", Харьков,
e-mail: yidorofeev@yandex.ua

Введение

В настоящее время большое внимание уделяется вопросам управления запасами. Создание запасов необходимо для полного и своевременного удовлетворения спроса со стороны внешних потребителей, но связано с издержками вследствие необходимости создания складов и затрат на хранение ресурсов. В результате возникает необходимость в разработке методов математического моделирования управляемых систем производства/хранения/распространения с целью их анализа и построения оптимальных стратегий управления запасами.

В работе рассматривается система, представляющая собой совокупность взаимосвязанных объектов, осуществляющих добычу сырья, производство, хранение, транспортировку и распространение некоторого набора продукции. Предполагая производительности узлов сети ненулевыми и учитывая, что уровни запасов ресурсов в узлах изменяются с течением времени, получаем динамическую сетевую модель, которая имеет множество практических приложений, включая производственные системы, коммуникационные сети, системы распределения ресурсов, транспортно-складские системы и т.п.

Существуют различные типы топологии рассматриваемых систем, которые определяются спецификой и размещением потребителей и складов. Если некоторые виды сырья или полуфабрикатов используются в нескольких процессах, проходящих одновременно, система приобретает эшелонированную структуру, и, поскольку отношения местоположения узлов играют существенную роль с точки зрения анализа динамики сети, подобные системы называют распределенными сетями поставок.

Для графического представления сетей поставок используется ориентированный граф, вершины которого соответствуют узлам сети и предполагаются однономенклатурными. Дуги графа описывают управляемые и неуправляемые потоки в сети. Управляемые потоки перераспределяют ресурсы между узлами, возможно перерабатывая их, и планируют поставки сырья извне. Неуправляемые потоки описывают спрос на ресурсы, который формируется как со стороны других узлов, так и внешнего окружения.

Граф, изображающий модель сети поставок, разделяется на уровни в зависимости от стадий переработки сырья и полуфабрикатов: уровень 1 содержит узлы сети, которые являются продавцами конечной продукции, уровень l содержит узлы, производящие либо сохраняющие ресурсы, которые используются для производства продукции уровнями строго меньше l, но не менее одного вида продукции уровня $(l-1)$.

1. Построение математических моделей сетей поставок.

Для математического описания сетей поставок применяются различные подходы [1,2]. Одним из наиболее распространенных является подход, использующий «дискретно-событийные модели», при построении которых используются следующие предположения:

1) выбирается период дискретизации по времени Δt и все временные интервалы считаются кратными выбранному периоду;

2) время увеличивается пошагово, текущий момент времени обозначается $k = 0,1,2,\ldots$, в конце каждого периода времени состояние системы вычисляется с помощью уравнений модели;

3) состояние системы характеризуется уровнем запасов каждого вида продукции в течение данного периода.

Для описания узлов сети поставок введем следующие обозначения:

N − количество узлов сети поставок;

$\Pi = \{\pi_{ij}\},\ \ i, j = \overline{1, N}$ − производственная матрица, значение (i, j)-го элемента которой равно количеству продукции i, измеренному в единицах, которое требуется для производства единицы продукции j;

$T_{j,i}$ − целочисленная переменная, значение которой кратно периоду дискретизации Δt, обозначающая время транспортировки продукции из узла j в узел i;

LT_i − целочисленная переменная, значение которой кратно периоду дискретизации Δt, обозначающая время выполнения заказа в узле i;

$Cost_i$ − стоимость производства единицы продукции i, измеряемая в у.е.;

h_i − стоимость хранения единицы продукции i в течение периода времени Δt, измеряемая в у.е.;

War_i − максимально допустимая вместимость склада узла i, измеряемая в единицах;

Cap_i − максимальная производительность узла i в течение периода времени Δt, измеряемая в единицах.

В качестве переменных состояния модели выбираются уровни запаса ресурсов, имеющихся в наличии $x_i(k)$, то есть таких, переработка которых к моменту времени k завершена и которые помещены в хранилища соответствующих узлов сети. В качестве управляемых потоков модели рассматриваются объемы заявок на поставку ресурсов $u(k)$, которые формируются узлами сети в момент времени k. В качестве неуправляемых потоков рассматриваются объемы внешнего спроса на конечную продукцию $d(k)$, которые поступают в момент k на узлы 1-го уровня сети поставок.

Пополнение запасов всегда происходит с некоторым запаздыванием относительно момента выдачи требования. Запаздывания возникают вследствие затрат времени на транспортировку ресурсов между узлами сети, наличия технологических ограничений системы коммуникаций, затрат времени на обработку сырья и полуфабрикатов в узлах сети (определяемых значениями времени выполнения заказа), наличия человеческого фактора.

Для точного понимания динамики сетей поставок необходимо в математической модели учесть временные запаздывания, порождаемые физическими законами функционирования системы. Поэтому необходимо определить значения периодов запаздывания управляемых потоков между узлами сети и найти максимальное значение периода запаздывания материальных потоков в сети:

$$\Lambda_i^{\max} = \max_j \Lambda_{j,i}, \qquad \Lambda_{\max} = \max_i \Lambda_i^{\max}, \tag{1}$$

где $\Lambda_{j,i} = T_{j,i} + LT_i$ − период запаздывания потоков между узлами j и i, т.е. заказ на поставку продукции j, отправленный из узла i в момент времени k, будет доставлен в момент времени $(k + T_{j,i})$, и будет переработан и помещен в хранилище в момент времени $(k + T_{j,i} + LT_i)$.

Тогда динамика сети поставок с запаздываниями управляемых потоков описывается следующим рекуррентным соотношением:

$$x(k+1) = x(k) + \sum_{t=0}^{\Lambda_{\max}} B_t u(k-t) + Ed(k), \tag{2}$$

где $x(k) \in R^N$ – вектор состояний системы; $u(k) \in R^m$ – вектор управляемых воздействий; $d(k) \in R^q$ – вектор неуправляемых воздействий; структура сети определяется структурой матриц $B_t \in R^{N\times q}$, $t = \overline{0, \Lambda_{max}}$, $E \in R^{N\times m}$.

Учитывая физический смысл введенных переменных, должны выполняться следующие ограничения:

1) переменные, описывающие уровни запаса ресурсов в узлах сети, а также управляемые и неуправляемые потоки должны быть неотрицательными;

2) уровни запаса, имеющиеся в наличии, не должны превышать вместимость соответствующих складов;

3) размеры заказов не должны превышать допустимые объемы транспортировок.

Указанные ограничения могут быть представлены в виде выпуклых многогранников в пространстве соответствующей размерности

$$x(k) \in X = \left\{ x \in R^N \,\middle|\, 0 \le x \le x^+ \right\}, \;\; u(k) \in U = \left\{ u \in R^m \,\middle|\, 0 \le u \le u^+ \right\}, \tag{3}$$

где векторы x^+ и u^+ считаются заданными.

Для определения оптимальной стратегии управления запасами необходимо точное задание характеристик внешнего спроса – интенсивности спроса в детерминированных моделях и вероятностных характеристик в стохастических моделях. Однако, при решении практических задач эти характеристики точно не известны. Поэтому используется подход, предложенный в работе [3], согласно которому предполагается, что сеть поставок функционирует в условиях неизвестного, но ограниченного спроса, который характеризуется интервальной неопределенностью. Это означает, что каждая компонента спроса является неизвестной величиной, но ее значения принадлежат некоторому интервалу, границы которого определяются на основании изучения статистики продаж. Тогда к рассмотренным ограничениям добавляется:

$$d(k) \in D = \left\{ d \in R^q \,\middle|\, d^- \le d \le d^+ \right\}, \tag{4}$$

где векторы d^- и d^+ определяют граничные значения спроса.

Для получения модели сети поставок без запаздываний применяется метод расширения пространства состояний. В результате применения указанного метода уравнение (2) примет вид:

$$\xi(k+1) = A\xi(k) + Fu(k) + Gd(k), \tag{5}$$

где матрицы A, F, G имеют соответствующую блочную структуру, а вектор состояний строится следующим образом:

$$\xi(k) = \left[x(k)^{\mathrm{T}},\;\; u(k-1)^{\mathrm{T}},\;\; u(k-2)^{\mathrm{T}},\;\; \ldots,\;\; u(k-\Lambda_{max})^{\mathrm{T}} \right]^{\mathrm{T}}. \tag{6}$$

Динамика системы (5) эквивалентна динамике системы, вектор состояний которой имеет вид:

$$\breve{\xi}(k) = \left[z(k)^{\mathrm{T}},\ \ u(k-1)^{\mathrm{T}},\ \ u(k-2)^{\mathrm{T}},\ \ \ldots,\ \ u(k-\Lambda_{max})^{\mathrm{T}} \right]^{\mathrm{T}}, \tag{7}$$

где переменные $z(k)$ называют фиктивными уровнями запаса и определяют как сумму уровня запаса ресурсов, находящихся в хранилищах, и ресурсов, которые находятся в процессе транспортировки между узлами сети:

$$z(k) = x(k) + \sum_{t=1}^{\Lambda_{\max}} \breve{B}_t u(k-t), \text{ где } \breve{B}_i = \sum_{t=i}^{\Lambda_{\max}} B_t. \tag{8}$$

Полученная система с вектором состояний $\breve{\xi}(k)$ допускает декомпозицию на две подсистемы. Первая представляет собой «мгновенную» модель сети, у которой все запаздывания равны нулю, и описывается уравнением

$$z(k+1) = z(k) + Bu(k) + Ed(k), \text{ где } B = \sum_{t=0}^{\Lambda_{\max}} B_t = I - \Pi. \tag{9}$$

Переменными состояния второй подсистемы являются задержанные управляющие воздействия $u(k-t), t = \overline{1, \Lambda_{max}}$ расширенной модели сети (5). При этом вторая подсистема является асимптотически устойчивой, поскольку ее матрица динамики является нильпотентной. Поэтому для анализа и синтеза стратегии управления запасами используется «мгновенная» модель распределенной сети поставок (9).

2. Синтез стратегии управления запасами.

Задача синтеза системы управления запасами состоит в отыскании стратегии управления, которая определяет управляемые потоки сети в соответствии с поставленной целью управления и с учетом ограничений (3,4).

Множество допустимых начальных условий определяется выражением:

$$X_0 = \left(\left\{ x : -\delta^- \le x \le x^+ - \delta^+ \right\} - BU \right) \cap \left\{ x : 0 \le x \le x^+ \right\}, \tag{10}$$

где векторы δ^- и δ^+, определяющие величины наименьшего и наибольшего влияния внешнего спроса, вычисляются следующим образом:

$$\delta_i^- = \min_{d \in D} E_i d, \quad \delta_i^+ = \max_{d \in D} E_i d, \tag{11}$$

где E_i обозначает *i*–ю строку матрицы E.

Одним из главных вопросов, на которые необходимо дать ответ в процессе анализа, является следующий: существует ли для построенной модели сети поставок допустимая стратегия управления запасами, которая обеспечивает полное и своевременное удовлетворение внешнего спроса при заданных ограничениях. В работе [3] доказана теорема, которая определяет необходимые и достаточные условия существования допустимой стратегии управления для систем рассматриваемого класса. Согласно этой теореме, допустимая стратегия управления существует, если и только если выполняется условие:

$$ED \subset -BU. \tag{12}$$

Условие (12) выполняется, если существует ε >0 такое, что $ED + \varepsilon\Omega \subset -BU$, где $\Omega = \left\{ x : \ \ 0 \le x \le x^+ - \left(\delta^= - \delta^- \right) \right\}$. Множество $ED + \varepsilon\Omega$ представляет собой множество векторов, которые могут быть представлены в виде $x = \begin{bmatrix} E & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ \varepsilon\omega \end{bmatrix}$, где $d \in D$, $\omega \in \Omega$.

Тогда множество $ED + \varepsilon\Omega$ содержится в $-BU$, если и только если условие

$$x^{ij} = \begin{bmatrix} E & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^i \\ \varepsilon\omega^j \end{bmatrix} \in -BU \tag{13}$$

выполняется для каждого $d^i \in \mathbf{vert}\{D\}$ и $\omega^j \in \mathbf{vert}\{\Omega\}$, где $\mathbf{vert}\{A\}$ обозначает множество вершин многогранника A. Значение ε, удовлетворяющее условию (13), может быть найдено с помощью следующего алгоритма:

1) Установить $\varepsilon = +\infty$.

2) Для каждого $d^i \in \mathbf{vert}\{D\}$ и $\omega^j \in \mathbf{vert}\{\Omega\}$ решить следующую задачу линейного программирования (ЛП):

$$\begin{aligned} &\mu_{ij} = \max \varepsilon, \\ &Ed^i + \varepsilon \omega^j = -Bu, \\ &0 \le u \le u^+, \quad \varepsilon \ge 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Если хотя бы для одного из наборов d^i, ω^j задача (14) не имеет решения, значит для данной модели сети поставок условие (12) не выполняется. В противном случае установить $\varepsilon = \min\limits_{i,j}\{\varepsilon, \mu_{ij}\}$.

3) Если $\varepsilon = 0$, то выполняется условие $ED \subseteq -BU$ и сходимость последовательности $x(k)$ $k = 0,1,2,...$ к некоторому оптимальному уровню запасов x^{opt} не может быть гарантирована.

4) Если ε >0, значит условие (12) выполняется.

Несмотря на то, что задача проверки условия (12) является NP-полной, она может быть решена до начала процесса управления в режиме *off-line*.

Если условие (12) выполняется, тогда выбор допустимой стратегии управления для «мгновенной» модели сети (9) определяется следующими соображениями. Определяются конструктивные ограничения сети поставок для переменных, определяющих фиктивные уровни запаса:

$$z(k) \in Z = \{z \in R^N \mid z^- \le z \le z^+\}. \tag{15}$$

Значения вектора нижней границы z^- должны обеспечивать неотрицательность значений вектора наличного уровня запаса $x(k)$. Тогда из (8) следует, что «наименьшие» значения вектора нижней границы определяются выражением:

$$z^- = \sum_{i=1}^{\Lambda_{\max}} B_i u^+. \tag{16}$$

Полученный результат кажется парадоксальным. Чтобы обеспечить $x(k) > 0$, накладывается ограничение (16), согласно которому чем выше мощность дуги, которая определяется максимальным размером перевозимых ресурсов, тем выше должна быть нижняя граница. Чтобы объяснить это на первый взгляд абсурдное заключение, напомним, что, чем большими являются мощности управляемых дуг, тем большими могут быть мгновенные объемы отгрузки ресурсов, которые невозможно сразу компенсировать из-за наличия запаздываний. Это требует наличия больших страховых уровней запаса, чтобы избежать опустошения складов.

Чтобы решить эту проблему, необходимо минимизировать стоимость величины в правой части выражения (16), используя вектор стоимостей производства единицы продукции $C = \{Cost_i > 0\}$ $i = \overline{1, N}$. Тогда необходимо найти вектор $\tilde{u}^+$ такой, что $0 \le \tilde{u}^+ \le u^+$, который минимизирует соответствующую стоимость при выполнении условия $ED \subset -B\tilde{U}$, где $\tilde{U} = \{u : 0 \le u \le \tilde{u}^+\}$. Это означает, что если управляемые дуги сети не используются в полную силу, то можно заменить в выражении (16) u^+ на $\tilde{u}^+$, чтобы свести к минимуму затраты. Значения вектора $\tilde{u}^+$ определяются путем решения следующей ЛП-задачи:

$$\min C\left(\sum_{i=1}^{\Lambda_{\max}} \hat{B}_i\right)\tilde{u}^{+},$$
$$0 \le \tilde{u}^{+} \le u^{+}, \quad ED \subset -B\tilde{U}. \tag{17}$$

Тогда векторы, определяющие оптимальную нижнюю и верхнюю границы фиктивного уровня запаса, вычисляются следующим образом:

$$\tilde{z}^{-} = \sum_{i=1}^{\Lambda_{max}} \hat{B}_i \tilde{u}^{+}, \qquad z^{+} = x^{+} + \sum_{i=1}^{\Lambda_{max}} \hat{B}_i \tilde{u}^{+}. \tag{18}$$

Для существования допустимой стратегии управления, формируемой в виде обратной связи по состоянию $u(k) = \Phi(z(k))$ с учетом ограничений (15), кроме выполнения условия (12), необходимо, чтобы выполнялось условие $\tilde{z}^{-} + \left(\delta^{+} - \delta^{-}\right) \le z^{+}$.

Поэтому на каждом шаге k для определения допустимой стратегии управления, гарантирующей полное удовлетворение внешнего спроса $d(k) \in D$, необходимо решить следующую ЛП-задачу [3]:

$$u(k) = \Phi(z(k)) = \arg\min_{\lambda \ge 0} \lambda,$$
$$\bar{z} \le z(k) + Bu(k) \le \bar{z} + \lambda\theta, \quad u(k) \in \tilde{U}, \tag{19}$$

где $\bar{z} = \tilde{z}^{-} - \delta^{-}$, $\theta = z^{+} - \tilde{z}^{-} - \left(\delta^{+} - \delta^{-}\right)$.

3. Численный пример.

В качестве примера рассмотрим сеть поставок, которая изучалась в работе [4]. Граф, представляющий модель сети поставок, можно описать следующим образом $G = (V = \{1,2,3,4,5\}, E = \{(5,1),(5,2),(5,3),(4,3),(3,1),(3,2)\})$.

Сеть содержит $N = 5$ узлов, которые в зависимости от стадии переработки сырья и полуфабрикатов разделены на три уровня: узлы 1 и 2 являются производственными узлами, которые перерабатывают продукцию узлов 3 и 5, и имеют склады, которые хранят, соответственно, продукцию типа 1 и продукцию типа 2; таким образом, узлы 1 и 2 образуют уровень 1 сети поставок; узел 3 перерабатывает продукцию узлов 4 и 5, хранит продукцию типа 3, и составляет уровень 2 сети поставок; узлы 4 и 5 являются поставщиками сырья соответствующего типа и составляют уровень 3 сети поставок.

Представим управляемые потоки в виде гипер-дуг, изображенных непрерывными линиями, добавив два потока, которые представляют поставки сырья извне, и пронумеруем, как показано на рис.1. Дуги d_1, d_2, изображенные пунктирными линиями, представляют неуправляемые потоки сети, то есть внешний спрос на конечную продукцию. Значения времени транспортировки между узлами сети $T_{i,j}$ и количество единиц продукции, которое требуется в соответствии с технологическим процессом π_{ij}, указаны для каждого управляемого потока в круглых и квадратных скобках, соответственно. Возле каждого узла в круглых скобках указаны значения времени выполнения заказа LT_i.

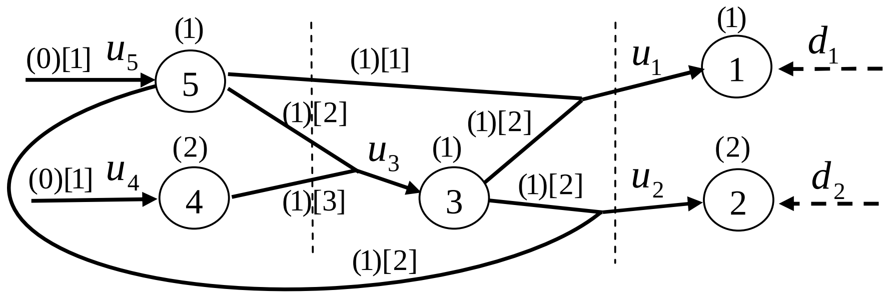

Рис.1. Графическое представление модели сети поставок

Динамика «мгновенной» модели сети описывается соотношением (9), где матрица управляющих воздействий B и матрица внешних возмущений E равны:

$$B=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\-2&-2&1&0&0\\0&0&-3&1&0\\-1&-2&-2&0&1\end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\\0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

Пусть ограничения по максимальной вместимости складов и производительности узлов сети за период имеют следующие значения: $War = x^+ = [80\ \ 75\ \ 300\ \ 500\ \ 500]^{\mathrm{T}}$, $Cap=[80\ \ 60\ \ 280\ \ 840\ \ 760]^{\mathrm{T}}$. Стоимости производства и транспортировки единицы продукции образуют массивы $Cost=[100\ \ 90\ \ 50\ \ 30\ \ 30]^{\mathrm{T}}$ и $h=[5\ \ 4\ \ 1\ \ 1\ \ 1]^{\mathrm{T}}$. Ограничения на максимальные объемы транспортировки имеют следующие значения $u^+=[50\ \ 50\ \ 250\ \ 350\ \ 350]^{\mathrm{T}}$. Внешний спрос может принимать произвольные значения на интервалах, ограниченных следующими величинами: $d^-=[10\ \ 5]^{\mathrm{T}}$, $d^+=[30\ \ 25]^{\mathrm{T}}$. Остальные нижние границы возможных значений переменных равны нулю.

В соответствии с (11) вычислим векторы $\delta^+=[-10\ \ -5\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}}$ и $\delta^-=[-30\ \ -25\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}}$.

Для построенной модели сети поставок необходимо проверить выполнение условия существования допустимой стратегии управления (12), используя приведенный выше алгоритм. Для этого необходимо сформировать множества вершин многогранников $\mathbf{vert}\{D\}$ и $\mathbf{vert}\{\Omega\}$, после чего решить ЛП-задачу (14) для всех возможных наборов вершин.

Воспользуемся функцией *linprog*, которая содержится в *Optimization Toolbox* пакета MATLAB. Для этого задачу (14) представим в следующем виде:

$$[-1\quad Cost]\cdot[\varepsilon\quad u_1\quad u_2\quad u_3\quad u_4\quad u_5]^{\mathrm{T}}\to\min,$$

$$[\omega^j\quad B]\cdot\begin{bmatrix}\varepsilon\\u_1\\\vdots\\u_5\end{bmatrix}=-Ed^i,\qquad \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}\varepsilon\\u_1\\\vdots\\u_5\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}1000\\ \\ \tilde{u}^+\\ \\ \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Для рассматриваемого примера размерности множеств вершин равны $\dim\mathbf{vert}\{D\}=4$, $\dim\mathbf{vert}\{\Omega\}=32$. В результате получили, что для всех $4\times32=128$ вариантов задача (20) имеет решение, и минимальное значение равно $\varepsilon_{\min}=0{,}0386$.

Таким образом, оптимальная допустимая стратегия управления для построенной модели сети существует, и гарантируется сходимость последовательности векторов состояний $x(k)$, $k = 0,1,...$ к некоторому оптимальному уровню запасов.

Кроме того, в результате решения задачи (20) были определены минимальные значения элементов вектора $\tilde{u}^+ = [30 \;\; 25 \;\; 110 \;\; 330 \;\; 300]^T$, определяющего верхние границы размеров заказа ресурсов, при которых гарантируется полное удовлетворение спроса. Тогда в соответствии с выражениями (18) определяются векторы, определяющие границы фиктивного уровня запаса $\tilde{z}^- = [60 \;\; 75 \;\; 220 \;\; 660 \;\; 300]^T$, $z^+ = [140 \;\; 150 \;\; 520 \;\; 1160 \;\; 800]^T$.

Результаты моделирования внешнего спроса для 50 периодов, полученные с помощью метода Монте-Карло, представлены на рис. 2.

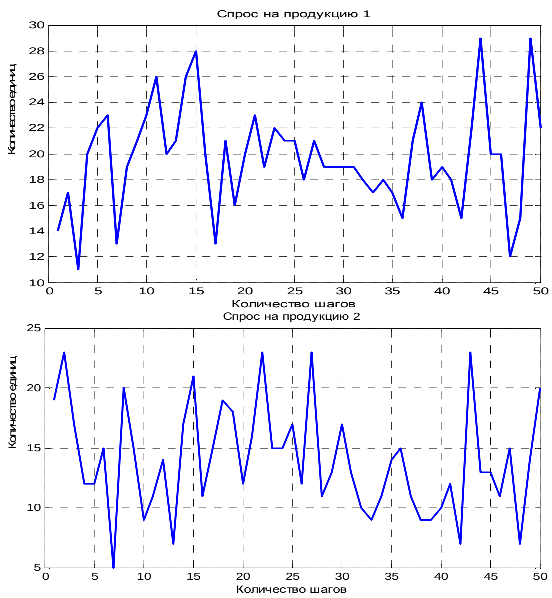

Рис.2. Результаты моделирования внешнего спроса

Предположим, что в начальный момент времени уровни запаса совпадают с максимальными объемами вместимости складов $z(0) = x^+$, а векторы $u(k)$ и $d(k)$ равны нулю для k <0. Стратегия управления $u(k) = \Phi(z(k))$ определяется на каждом шаге k путем решения ЛП-задачи (19), которую для использования функции *linprog* пакета MATLAB необходимо представить в виде:

$$[1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0] \cdot [\lambda \;\; u_1(k) \;\; u_2(k) \;\; u_3(k) \;\; u_4(k) \;\; u_5(k)]^{\mathrm{T}} \to \min,$$

$$\begin{bmatrix} -\theta & B \\ [0] & -B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda \\ u_1(k) \\ \vdots \\ u_5(k) \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} \bar{z} - z(k) \\ -(\bar{z} - z(k)) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} \lambda \\ u_1(k) \\ \vdots \\ u_5(k) \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \tilde{u}^+ \\ \\ \end{bmatrix}.$$

где $\theta = [60 \;\; 55 \;\; 300 \;\; 500 \;\; 500]^{\mathrm{T}}$.

Результаты моделирования изменения фиктивных уровней запаса $z(k)$ и объемов производства $u(k)$, полученные с использованием «мгновенной» модели сети для узлов 1-4, представлены на рис. 3, а для узла 5 – на рис. 4. Также приведены графики изменения наличных уровней запаса $x(k)$, полученные с помощью расширенной модели сети.

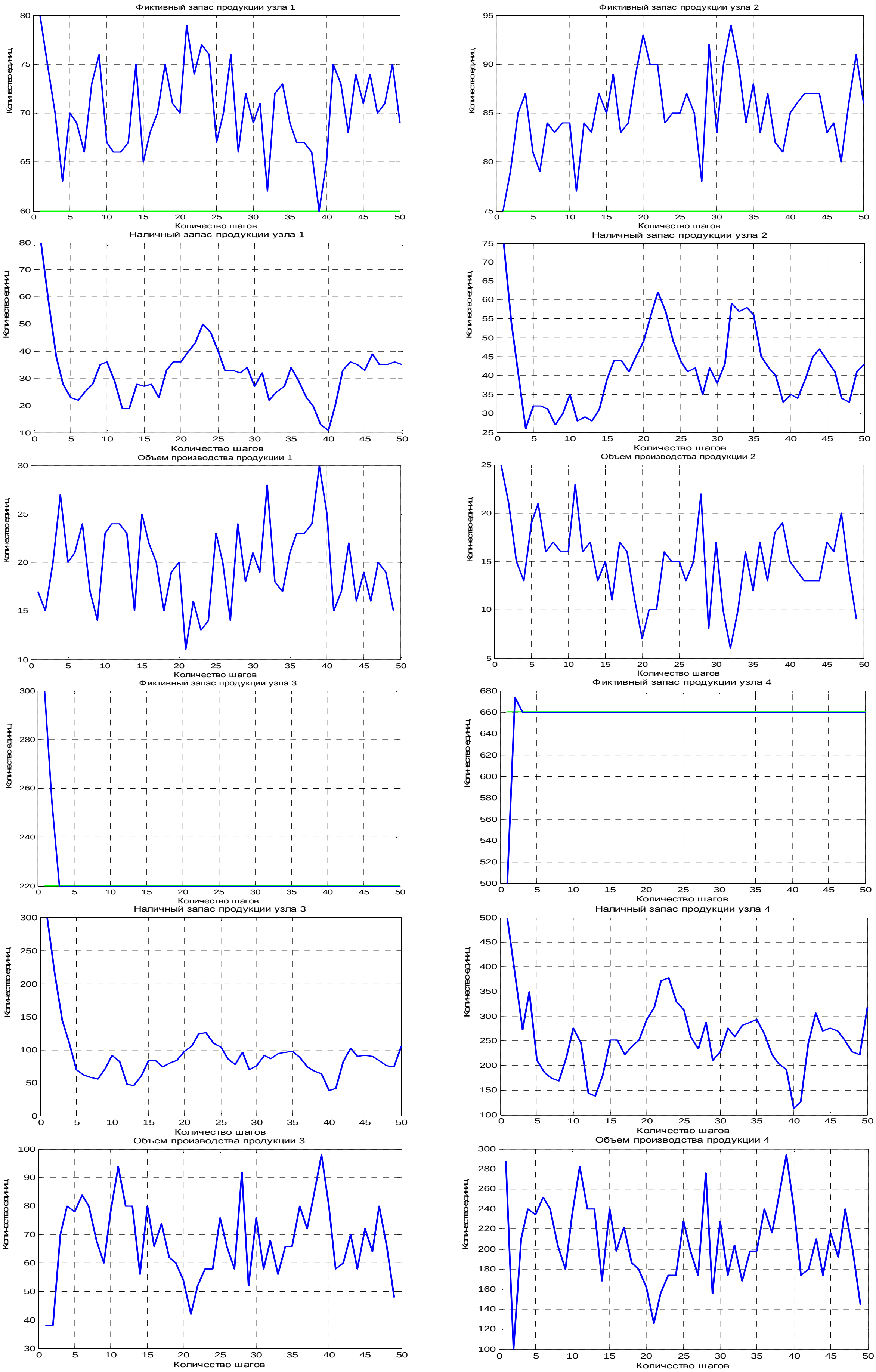

Рис.3. Результаты численного моделирования

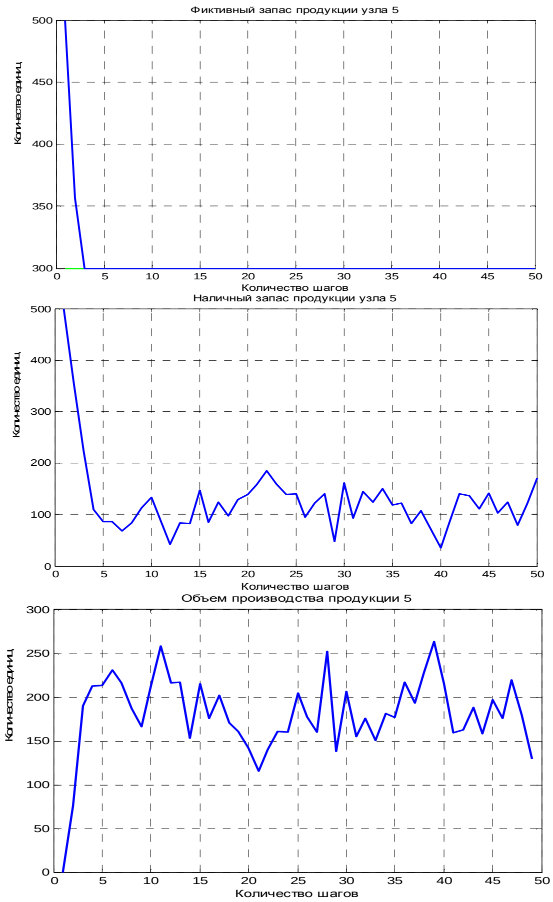

Рис.4. Результаты численного моделирования

Анализ графиков позволяет сделать следующие выводы:

1) полученная стратегия управления запасами обеспечивает полное и своевременное удовлетворение как внешнего, так и внутреннего спроса;

2) сходимость последовательности векторов состояний $x(k)$, $k = 0,1,...$ к некоторому оптимальному уровню запасов достигнута за 4 шага.

3) наличный уровень запаса любого из узлов сети ни в одном периоде, за исключением начального состояния, не достиг максимальной величины вместимости склада; таким образом, размеры складов можно сократить.

Выводы.

Предложенный подход к построению математической модели распределенной сети поставок с запаздываниями управляемых потоков и интервальной неопределенностью внешнего спроса позволяет сформулировать задачу проверки условия существования и задачу формирования допустимой стратегии управления как ЛП-задачи. Первая из них решается в режиме *off-line* до начала процесса управления, а вторая – в режиме *on-line* в каждый момент времени k. Получена программная реализация алгоритмов с помощью пакета MATLAB. Результаты численного моделирования подтверждают эффективность предложенного подхода.

Литература

1. *Лотоцкий В.А., Мандель А.С.* Модели и методы управления запасами. - М.: Наука, 1991. 189 с.

2. *Daganzo C.* A Theory of Supply Chains. - New York: Springer, 2003.
3. *Blanchini F., Rinaldi F., Ukovich W.* Least inventory control of multi-storage systems with non-stochastic unknown input // IEEE Transaction on robotics and automation. 1997. Vol. 13, P. 633–645.
4. *Hennet, J.-C.,* A bimodal scheme for multi-stage production and inventory control // Automatica. 2003, № 39, P. 793-805.